

HIPÉRBOLA RECTANGULAR Y SUS APLICACIONES PARA FORMULAR LA CURVA RESULTADO DE MEDICIONES EN INGENIERÍA GEOTÉCNICA

Ingeniero Civil Arnoldo J. L. Bolognesi

Resumen: La hipérbola rectangular permite formular con una precisión satisfactoria la curva obtenida mediante valores medidos en aplicaciones de la Ingeniería Geotécnica. En los cuatro tipos de hipérbola rectangular mostrados en cada uno de los cuadrantes de la Figura 1 se obtienen innumerables soluciones variando el valor de C , constante de la fórmula 1. Es por ello que es siempre probable encontrar una hipérbola para sustituir las curvas de valores medidos que no respondan a una ley lineal. La precisión del ajuste entre ambas, determinado como se indica en el texto, indicará si es la solución conveniente. En este artículo se presentan ejemplos del proceso de formulación de la curva resultado de mediciones hasta la falla y su aplicación en tres casos concretos de ingeniería geotécnica. En los casos 1 y 3 se ha partido de valores medidos en un ensayo de carga en la base de un pilote. En el 2 se utiliza la hipérbola determinada en 1 representándola en un cuadrante diferente.

Introducción

La hipérbola rectangular permite formular con una precisión satisfactoria la curva obtenida mediante valores medidos en aplicaciones de la Ingeniería geotécnica. Hay cuatro tipos de hipérbola rectangular mostrados en cada uno de los cuadrantes de la Figura 1.

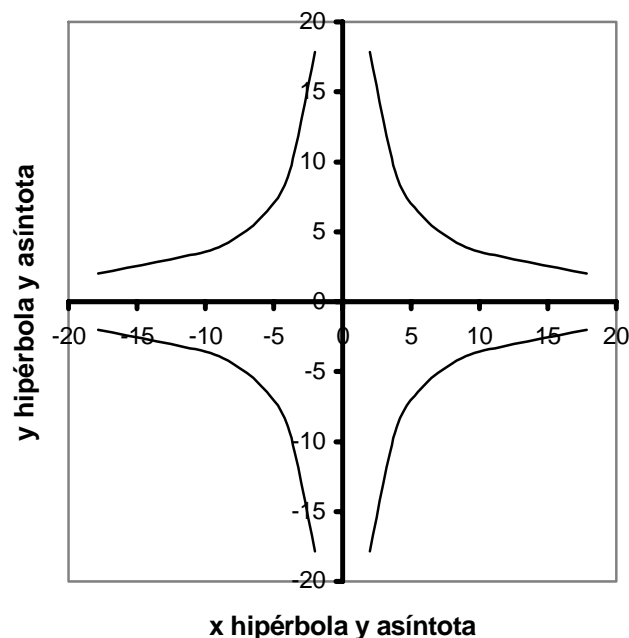


Figura 1. Hipérbolas rectangulares para $C = 35,691$ y para $C = -35,691$

En la hipérbola rectangular las asíntotas son perpendiculares entre sí. Si además se las utiliza

como el eje x y el eje y, la ecuación de la hipérbola es:

$$x_h y_h = C \quad (1)$$

en la cual C es una constante y x_h e y_h son los valores de x e y referidos al centro de los ejes de coordenadas de la hipérbola. Para cada valor de C hay dos hipérbolas simétricas en cuadrantes opuestos, el primero y el tercero y el segundo y el cuarto.

En este artículo se presentan tres ejemplos del proceso de formulación de la curva resultado de mediciones hasta la falla en ingeniería geotécnica. Se relacionan números que permiten obtener fórmulas correspondientes a tipos de hipérbolas mostrados en la Figura 1, cuyos valores de C son los obtenidos en análisis desarrollados en los subtítulos aplicaciones.

Se presenta la formulación general y su aplicación a un problema concreto con datos medidos que son los mismos o derivados de los mismos para cada uno de los tres casos. En lo que sigue, cuando corresponda, se empleará notación utilizada por Kondner and Zelasko (1963) en uno de los primeros artículos publicados sobre la formulación hiperbólica.

Caso 1. Hipérbola en el cuadrante derecho inferior de la Figura 1

Formulación

La Figura 2 ha sido construida con los valores obtenidos en mediciones. Originariamente se dispone solamente de la información representada con línea gruesa, la curva que relaciona los valores medidos, x_m e y_m y sus ejes de coordenadas por cuyo centro se hace pasar la hipérbola que mejor se ajusta a los valores medidos, la cual en este caso pertenece al tipo de la ubicada en el cuadrante derecho inferior de la Figura 1.

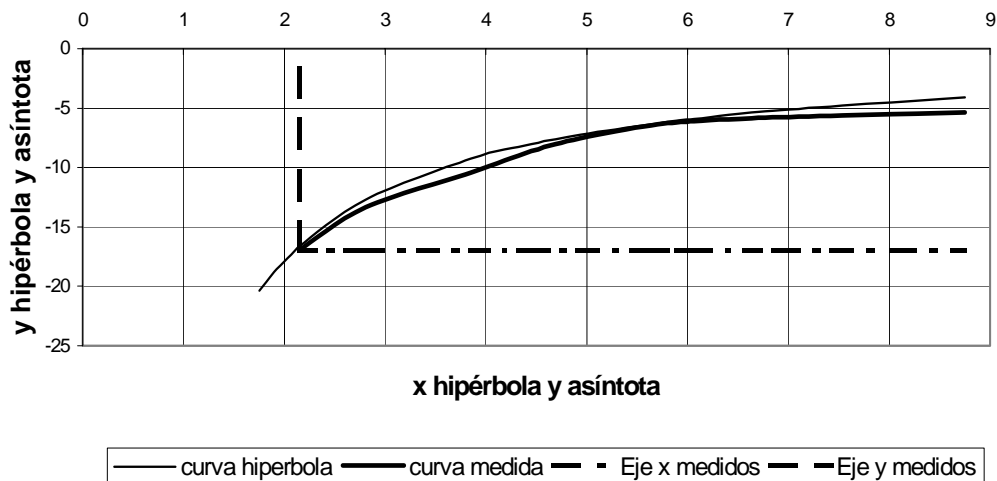


Figura 2. Posición relativa de los ejes de coordenadas en los cuales se representan los valores x_m e y_m (líneas gruesas) y de los x_h e y_h (líneas finas), de la curva que representa los valores medidos (línea gruesa) y de la hipérbola (línea fina) que mejor se ajusta a los valores medidos.

Para aplicar la ecuación (1) se requiere conocer la posición relativa del centro de los ejes de los valores x_h e y_h , con respecto al centro de los ejes de los valores x_m e y_m . Si se denomina α la distancia entre los ejes de los valores y_h e y_m y β la distancia entre los ejes de los valores x_h e x_m :

$$x_h = \alpha + x_m \quad e \quad y_h = -\beta + y_{hm} \quad (2)$$

Como x_m e y_{hm} son iguales a 0 en el centro de coordenadas de los valores x_m e y_m que es a la vez un punto de la hipérbola queda determinado

$$C = -\alpha \beta \quad (3)$$

Para calcular y_{hm} , valores de y de la hipérbola referidos al sistema de coordenadas de los valores x_m e y_m se introducen los términos de las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} (\alpha + x_m)(-\beta + y_{hm}) &= -\alpha \beta \\ -\alpha \beta + \alpha y_{hm} - \beta x_m + x_m y_{hm} &= -\alpha \beta \\ \alpha y_{hm} - \beta x_m + x_m y_{hm} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$x_m y_{hm} = \beta x_m - \alpha y_{hm} \quad (5)$$

ecuación de la hipérbola referida al sistema de coordenadas de los valores x_m e y_m . Comparar con ecuación (1), de la hipérbola referida al sistema de coordenadas de los valores x_h e y_h .

$$\begin{aligned} x_m &= \beta(x_m/y_{hm}) - \alpha \\ x_m/y_{hm} &= (x_m/\beta) + (\alpha/\beta) \\ \text{Si, en valores absolutos, se llama} \\ a &= \alpha/\beta \quad (6) \\ b &= 1/\beta \quad (7) \\ x_m/y_{hm} &= a + bx_m \quad (8) \end{aligned}$$

$$y_{hm} = x_m / (a + bx_m) \quad (9)$$

Las ecuaciones (6), (7), (8) y (9) se obtienen reproduciendo los pasos utilizados por Kondner and Zelasko (1963) para obtener sus ecuaciones (7), (8) y (9).

Se repite que x_m son los valores de x en el sistema de coordenadas $x_m y_m$. y_{hm} son los valores de y en dicho sistema de la hipérbola rectangular que pasa por el origen de coordenadas del mismo.

Determinados a y b se puede calcular:

$$\alpha = a/b \quad (10)$$

$$-\beta = 1/b \quad (11)$$

Los signos de α y β son los de la ecuación (2), los de a y b los de la ecuación (8).

$$C = -\alpha \beta \quad (12)$$

$$y_{hm}/x_m = 1/(a + bx_m) \quad (9a), \text{ módulo tangente de la}$$

hipérbola para cada valor de x_m , igual a $E_i = 1/a$ para x_m tendiendo a 0.

La ecuación (9) define la curva de una hipérbola referida al sistema de coordenadas de los valores x_m e y_m con y_{hm} asintótico para x_m tendiendo a infinito, con incrementos de y_{hm} para incrementos iguales de x_m decrecientes para valores crecientes de x_m o con módulos tangentes decrecientes para valores crecientes de x_m .

Para obtener los valores de a y b que mejor se ajustan a los valores x_m e y_m medidos se calculan los de x_m/y_m correspondientes a cada x_m y los de la regresión lineal de los mismos. Los valores de a y b en las ecuaciones (8) y (9) son los de la regresión lineal. Normalmente los valores medidos no coincidirán exactamente con los de su regresión lineal. La precisión del ajuste se puede evaluar sea mediante el coeficiente de correlación entre los puntos representativos de la curva calculada con la ecuación (9) y la de los valores medidos o el coeficiente de variación, COV, de la relación entre los puntos y representativos de la hipérbola y los puntos

y representativos de los valores medidos. Una buena precisión corresponde a valores del coeficiente de correlación del orden de 0,99 y del COV del orden de 0,05.

El análisis anterior se basa en valores medidos sin mencionar el significado físico de tales mediciones.

Aplicación

La Figura 2 tiene como propósito explicar como se deducen las ecuaciones que permiten formular el resultado de mediciones mediante la hipérbola rectangular que mejor se ajusta a los valores medidos. Para ello deben conocerse α y β . En la experiencia del autor éstos y todos los valores resultantes de la aplicación de dichas ecuaciones se obtienen rápidamente disponiendo las columnas de la hoja de cálculo como se indica en la Tabla 1, en la cual como encabezamiento se indica el significado físico de dichas mediciones.

TABLA 1. Hoja de cálculo con los valores medidos, x_m e y_m y los calculados para definir la hipérbola rectangular que mejor se ajusta a los mismos.

Ensayo de carga rápido. Asentamiento de la base del pilote (δ_b), reacción (R_b) que debe vencer el mismo para lograrlo y reacción (R_{hb}) según la hipérbola rectangular que mejor se ajusta a los valores medidos. Pilote cilíndrico de 1800 mm de diámetro con su base apoyada en las arcillas marinas de la formación Paraná (Mioceno).										
	x_m	x_m / y_m	x_m / y_{hm}	x_m		y_m	y_{hm}	R_{hb} Usable	R_{hb} NO usable	R_{hb} / R_b
				δ_b (%D)	R_b (MN)					
				0,00	0,00		0,00			
				0,66	3,67		3,91			1,066
δ_b (mm)	δ_b (%D)	δ_b / R_b	δ_b / R_{hb}	1,70	6,56		7,34			1,120
41,33	2,30	0,274	0,267	2,30	8,37		8,60			1,027
50,19	2,79	0,295	0,297	2,79	9,45		9,40			0,994
62,89	3,49	0,331	0,339	3,49	10,54		10,30			0,977
70,38	3,91	0,359	0,364	3,91	10,90		10,74			0,985
85,80	4,77	0,423	0,416	4,77	11,26		11,47	11,47		1,018
118,80	6,60	0,568	0,526	6,60	11,62				12,55	
129,97	7,22	0,651	0,563	7,22	11,10				12,82	
91,86	5,10		0,436	5,1	0,00					
	b	a	β	α	C					
Regresión:	0,0601	0,1291	-16,630	2,146	-35,691					
				Coeficiente de correlación:					0,994	
				R_{hb} asintótico:	16,63			Promedio:		1,027
							Desviación Estándar:			0,051
								COV:		0,049

Nota ensayo de carga: Carga de falla (11,26 MN) alcanzada en 31 incrementos iguales. Duración 8 1/2 horas.

Las ecuaciones (8) y (9) para el caso analizado en la Tabla 1 son:

$$\delta_b / R_{hb} = a + b \delta_b \quad (13)$$

$$R_{hb} = \delta_b / (a + b \delta_b) \quad (14)$$

La ecuación (14) es la fórmula de la hipérbola que reemplaza a la curva del ensayo efectuado, con la precisión evaluada en la Tabla 1 mediante los coeficientes de correlación y COV, de 0.994 y 0.049 respectivamente.

Los datos de las columnas x_m / y_m y x_m adyacentes se utilizan para determinar los coeficientes **a** y **b** de la regresión lineal. Para la aplicación de la Tabla 1 el sistema de unidades está indicado en las celdas recuadradas en las columnas adyacentes x_m e y_m .

Si se cambia el sistema de unidades se debe considerar su efecto en los coeficientes **a** y **b**. Si en lugar de %D se prefiere utilizar mm como unidad de δ_b , **b** no cambia y **a** debe multiplicarse por el número de mm que corresponden a 1% de D, 18 en este caso donde 1800 mm es el diámetro, D, de la base. Si en lugar de MN se prefiere utilizar kN como unidad de R_b y consecuentemente de R_{hb} , **a** y **b** deben dividirse por 1000.

Si en lugar de las Reacciones R_b se utiliza la presión unitaria q_b , que se obtiene dividiéndolas por el área A_b de la base, **a** y **b** deben multiplicarse por el número de A_b expresado en m^2 , en este caso 2,54. Si la unidad de R_{hb} es MN la de q_{hb} es MPa y si es kN es kPa.

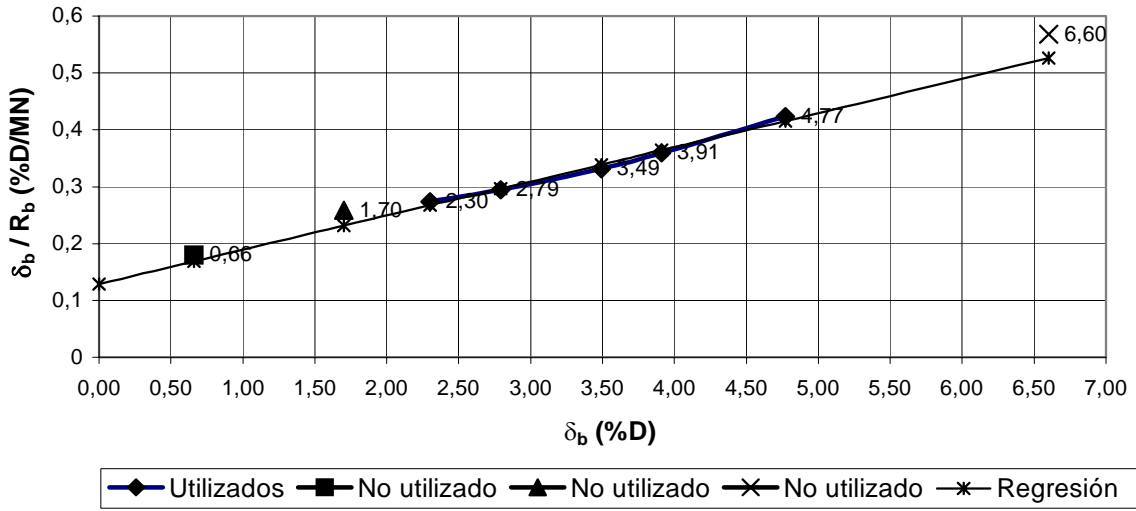


Figura 3. δ_b / R_b correspondientes a los valores de δ_b indicados con los números al lado de cada punto y regresión lineal de los utilizados.

Con los datos de las columnas adyacentes x_m y y_m de la Tabla 1, efectuando los cálculos correspondientes, se ha construido la Figura 3. Esta Figura denominada por Kondner and Zelas-ko (1963) hipérbola transformada es el primer paso subsiguiente a la elección mediante la Figura 1 del tipo de hipérbola que reemplace a la curva de los valores medidos. Ello es posible si en la hipérbola transformada estos últimos están aproximadamente en una línea recta. Normalmente deben descartarse algunos.

Para la construcción de la regresión lineal no se han utilizado 3 de los 8 puntos mayores de 0 de la columna x_m . Después que las arcillas entran en fluencia la línea que une los puntos medidos no puede sustituirse por una hipérbola. Esta es la situación del punto correspondiente a $\delta_b = 6,6$. El correspondiente a $\delta_b = 1,70$ puede ser el resultado de una medición imprecisa. El correspondiente a $\delta_b = 0,66$ podría haberse utilizado. Se optó no hacerlo y para determinar la regresión lineal se emplearon solamente los correspondientes a los valores de δ_b 2,30, 2,79, 3,49, 3,91 y 4,77 cuyos valores de x_m / y_m se encuentran en la columna x_m / y_m de la Tabla 1.

En la misma Tabla 1 se verifica el logro de una precisión satisfactoria entre la hipérbola y la curva de los valores medidos mediante los valores del coeficiente de correlación = 0,994 y el de COV = 0,049.

En publicaciones es frecuente que se presente la relación gráfica entre (x_m / y_{hm}) y x_m sin tablas con sus valores y estos deben ser obtenidos de la misma. En la Figura 3 la ordenada al origen es **a**. La pendiente de la línea de la regresión es **b** y al calcularla debe tenerse presente que generalmente, como en dicha figura, las escalas de abscisas y de ordenadas no son iguales.

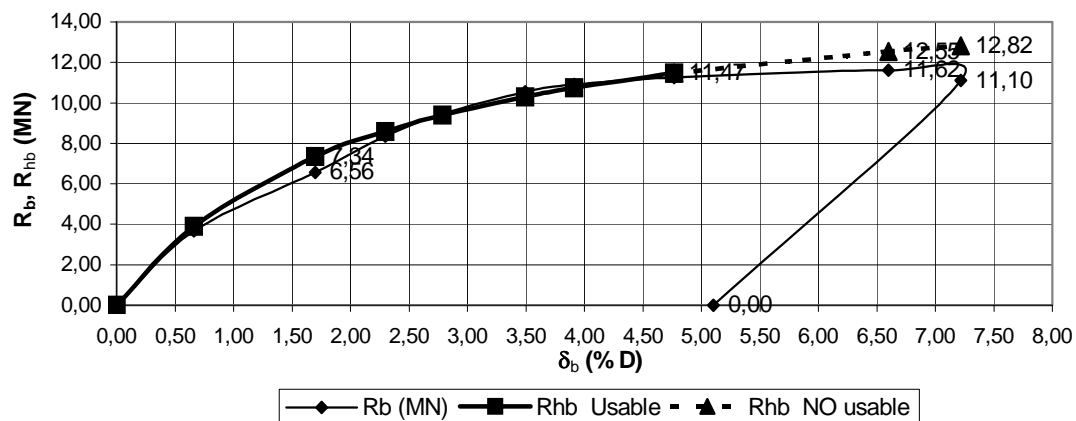


Figura 4. Hipérbola (línea gruesa) hasta el valor máximo de $x_m = \delta_b$ en que puede sustituir la curva de los valores medidos (línea fina) y prolongación hipérbola (línea de rayas) que no debe ser usada.

Mediante los valores de las columnas x_m, y_m e y_{hm} se construye la Figura 4 utilizando como 0 el centro el de los ejes de coordenadas de los valores medidos. En la Figura 2 lo es el centro de los ejes de coordenadas de la hipérbola. La curva en línea fina representa los valores medidos y la curva en línea gruesa la hipérbola hasta el valor máximo de x_m en que puede sustituirla como lo demuestra la curva en línea de rayas que es la prolongación de la hipérbola por encima de dicho valor máximo.

Caso 2. Hipérbola en el cuadrante izquierdo superior de la Figura 1

En la hipérbola definida en la Tabla 1, para calcular δ_b en función de R_{hb} mediante una fórmula con la estructura de la (9) debe utilizarse la hipérbola ubicada en el cuadrante izquierdo superior de la Figura 1. Los valores de **a** y **b** serán diferentes a los de la Tabla 1 y uno de ellos tendrá signo diferente.

Formulación

Para cada uno de los cuatro cuadrantes el proceso de formulación es el mismo con diferencias en las fórmulas que definen la posición relativa del centro de los ejes de los valores x_h e y_h con respecto al centro de los ejes de los valores x_m e y_m .

$$x_h = -\alpha + x_m \quad \text{e} \quad y_h = \beta + y_{hm} \quad (15).$$

$$C = -\alpha \beta \quad (16) \quad .$$

Para calcular y_{hm} , valores de y_h referidos al sistema de coordenadas $x_m y_m$ se Introducen los términos de las ecuaciones (15) y (16) en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} (-\alpha + x_m) (\beta + y_{hm}) &= -\alpha \beta \\ -\alpha \beta - \alpha y_{hm} + \beta x_m + x_m y_{hm} &= -\alpha \beta \\ -\alpha y_{hm} + \beta x_m + x_m y_{hm} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

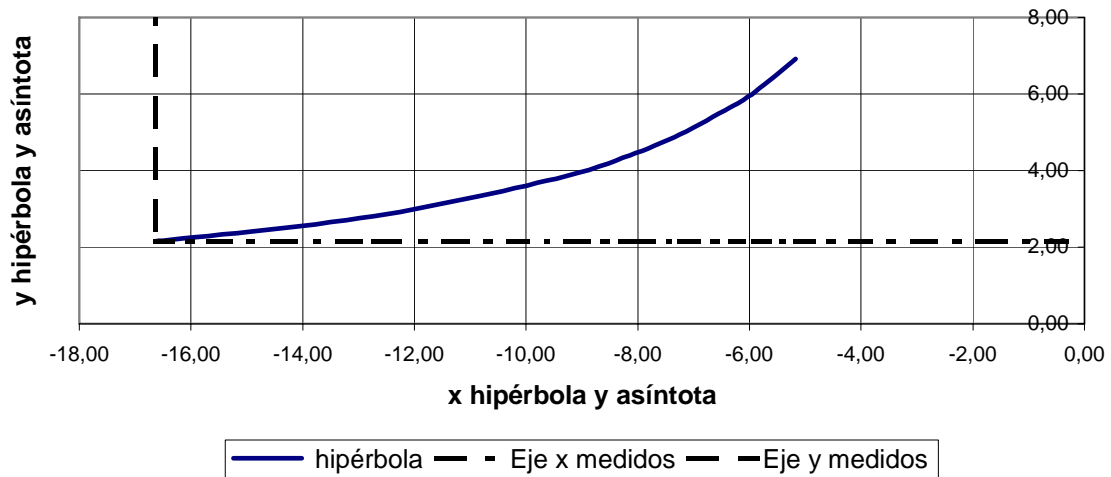


Figura 5. Posición relativa de los ejes en los cuales se representan los valores x_m e y_{hm} (líneas gruesas) y de los ejes en los cuales se representan los valores x_h e y_h (líneas finas) y de la hipérbola (línea gruesa) simétrica de la de la Figura 2.

$$x_m y_{hm} = \alpha y_{hm} - \beta x_m \quad (18)$$

ecuación de la hipérbola referida al sistema de coordenadas $x_m y_m$.

$$x_m = \alpha - \beta (x_m / y_{hm})$$

$$x_m / y_{hm} = -(x_m \beta) + (\alpha / \beta)$$

Repetiendo los pasos seguidos en el caso 1, se llama, *en valores absolutos*

$$a = \alpha / \beta \quad (6)$$

$$b = 1/\beta \quad (7)$$

$$x_m / y_{hm} = a - b x_m \quad (19)$$

$$y_{hm} = x_m / (a - b x_m) \quad (20)$$

y se puede calcular, *en valores absolutos*

$$\alpha = a/b \quad (10)$$

$$\beta = 1/b \quad (11)$$

$$C = \alpha\beta \quad (12)$$

La ecuación (20) define la curva de una hipérbola referida al sistema de coordenadas de los valores x_m e y_m con y_{hm} asintótico para x_m tendiendo a infinito, con incrementos de y_{hm} para incrementos iguales de x_m crecientes para valores crecientes de x_m .

Aplicación

En esta aplicación, analizada en la Tabla 2, $x_m = y_{hm} = (R_{hb})$ e $y_{hm} = x_m = (\delta_b)$ de la Tabla 1

$$R_{hb} / \delta_b = a - b R_{hb} \quad (21)$$

$$\delta_b = R_{hb} / (a - b R_{hb}) \quad (22)$$

Tabla 2. Hoja de cálculo para determinar los valores de **a** y **b** en la hipérbola rectangular representativa de los valores de δ_b en función de los de R_{hb} de la Tabla 1.

Mismo ensayo que en la Tabla 1. En esta aplicación $x_m = R_{hb}$ e $y_{hm} = \delta_b$
 Valores de R_{hb} y de δ_b iguales que en Tabla 1.

		x_m	x_m / y_{hm}	x_m	y_{hm}
		R_{hb} (MN)	R_{hb}/δ_b	R_{hb} (MN)	δ_b (% D)
		0	7,7482	0	0
x_m	x_m / y_{hm}	3,91	5,9259	3,91	0,66
R_{hb} (MN)	R_{hb}/δ_b	7,35	4,3236	7,35	1,7
8,60	3,740138887	8,60	3,7401	8,60	2,30
9,40	3,368870676	9,40	3,3689	9,40	2,79
10,30	2,950469306	10,30	2,9505	10,30	3,49
10,74	2,745854293	10,74	2,7459	10,74	3,91
11,47	2,404420861	11,47	2,4044	11,47	4,77
	b	a	β	α	C
Regresión:	-0,4659	7,7482	2,146	-16,630	-35,691

Nota: Valores de R_{hb} calculados con a y b de Tabla 1 con 9 decimales.

La regresión para determinar los valores de a y b y los signos que los afectan se ha calculado utilizando las dos primera columnas de la Tabla 2. (R_{hb} comprendido entre 8,6 y 11,47)

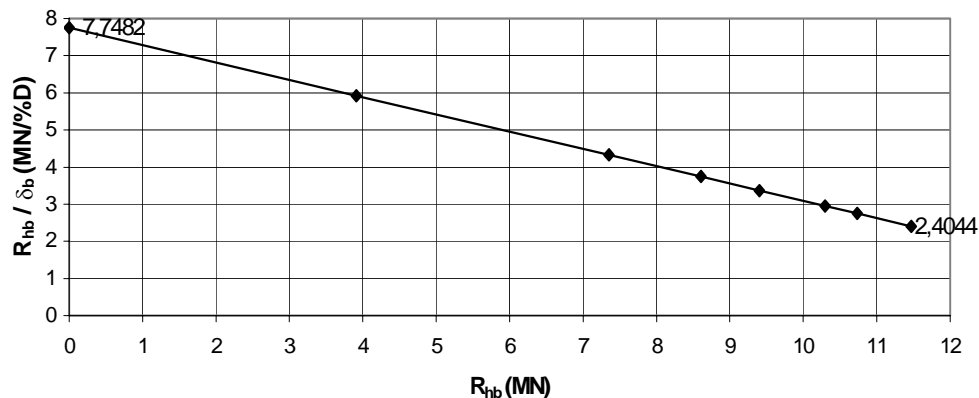


Figura 6. Representación gráfica de la fórmula (21) con datos de la Tabla 2

La Figura 6 se ha construido con los valores de las dos columnas centrales de la Tabla 2 (R_{hb} comprendido entre 0 y 11,47). El número en la ordenada al origen es a .

Nota: Los datos medidos en las columnas x_m e y_m de la Tabla 1 tienen una precisión de 2 decimales que es igualmente las de sus derivados. Para que los casos 1 y 2 conduzcan a resultados exactamente iguales en la hoja de cálculo de la Tabla 2 se han efectuado operacio-

nes de hasta 9 decimales, reproduciendo valores de la hoja de cálculo de la Tabla 1 con más decimales que los elegidos para la impresión de la misma. Del punto de vista práctico se puede trabajar con 2 decimales que conducirán a pequeñas diferencias entre los 2 casos.

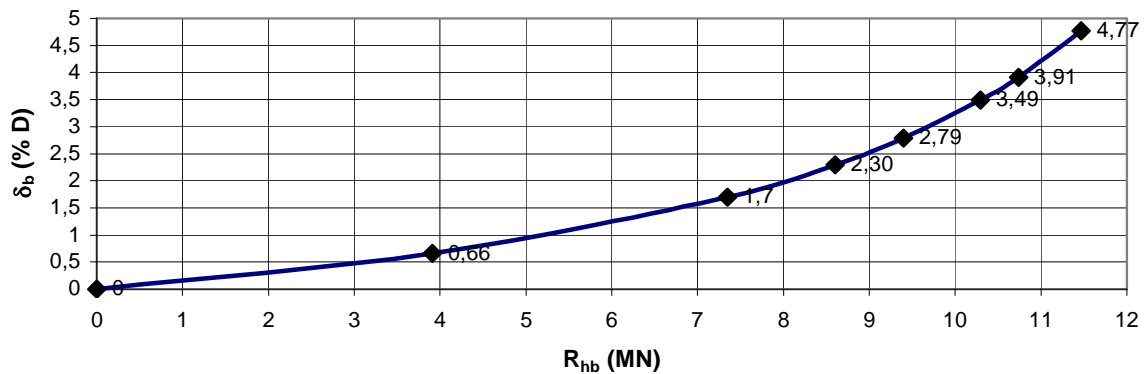


Figura 7. Representación gráfica de la fórmula (22) con datos de la Tabla 2.

La Figura 7 se ha construido con los valores de las de las dos columnas finales de la Tabla 2. (R_{hb} comprendido entre 0 y 11,47). Los números en los puntos de la curva son los valores de δ_b .

Designando con un subíndice 1 los valores absolutos de Tabla 1 y con un subíndice 2 los de la Tabla 2 se verifica que $\alpha_2 = \beta_1$ y que $\beta_2 = \alpha_1$. El valor absoluto de b_2 se calcula mediante la ecuación (11). Conocido este último se calcula el valor de a_2 mediante la ecuación 10. Los signos que los afectan son los de la ecuación (19) y se reflejan en la Figura 6. Es una recta descendente desde el valor de la ordenada al origen, **a** y, por consiguiente, **b** está afectado con el signo negativo.

Es decir que podría haber obtenido los valores de α_2 , β_2 y C_2 de la Tabla 1. Para ello, seleccionado el cuadrante izquierdo superior se dibuja esquemáticamente la Figura 5 para determinar los signos de α y β y efectuar la formulación. Este procedimiento se puede aplicar para obtener, en base a los valores de R_{hb} calculados para un cuadrante, curvas en otros cuadrantes a las cuales se les ha impuesto dicho valor de R_{hb} , como en este Caso 2.

Caso 3. Hipérbola en el cuadrante izquierdo inferior de la Figura 1.

En los dos casos analizados hasta ahora se ha asignado signo positivo al incremento del asentamiento (o de la acción) y de la reacción (o del asentamiento) que provoca dicho incremento. Es frecuente aplicar al asentamiento un signo negativo y como en la aplicación del Caso 2 colocar la reacción (o la acción) en el eje de coordenadas de los valores x_m .

Formulación

En este caso la hipérbola está ubicada en el cuadrante izquierdo inferior de la Figura 1. Esquemáticamente se elige un punto de la hipérbola y ubica en él el centro de un sistema de coordenadas x_m e y_m tal como se ha hecho con valores de α y β calculados posteriormente para una presentación didáctica inicial en las Figuras 2 y 5, con lo que se determina que:

$$x_h = -\alpha + x_m \quad e \quad y_h = -\beta + y_{hm} \quad (23), \quad y_{hm} \text{ es negativo}$$

$$C = (-\alpha)(-\beta) = \alpha \beta \quad (24)$$

Y mediante deducciones similares a las practicadas en los dos casos ya analizados:

$$x_m y_{hm} = \alpha y_{hm} + \beta x_m \quad (25)$$

$$x_m / y_{hm} = -a + b x_m \quad (26), y_{hm} \text{ es negativo}$$

$$y_{hm} = x_m / (-a + b x_m) \quad (27), y_{hm} \text{ es negativo}$$

Aplicación

En esta aplicación $x_m = R_b$ e $y_{hm} = \delta_{hb}$

$$R_b / \delta_{hb} = -a + b R_b \quad (28), \delta_{hb} \text{ es negativo}$$

$$\delta_{hb} = R_b / (-a + b R_b) \quad (29), \delta_{hb} \text{ es negativo}$$

En este caso no se impone ninguna condición resultado de la hoja de cálculo de la Tabla 1, como en el Caso 2. Los valores de x_m e y_m son los medidos durante el ensayo.

TABLA 3. Hoja de cálculo con los valores medidos $x_m = R_b$ y expresados con signo negativo $y_m = \delta_b$ y los calculados para definir la hipérbola rectangular que mejor se adapta a los mismos.

Mismo ensayo que en la Tabla 1. En este caso $x_m = R_b$ e $y_m = \delta_b$. Valores de R_b iguales que en TABLA 1. Valores de δ_b con signo negativo iguales en valor absoluto a δ_b de TABLA 1.

	x_m	x_m / y_m	x_m / y_{hm}	x_m	$y_m (\delta_b)$	$y_{hm} (\delta_{rb})$	$y_{hm} (\delta_{rb})$	Us./ No Us.	
	R_b (MN)	R_b / δ_b	R_b / δ_{hb}	R_b (MN)	Medido (% D)	Hipérb. Usable	Hip. No Usable		
	0,00		-6,4116	0,00	0,00	0,00			
	3,67	-5,5606	-5,2139	3,67	-0,66	-0,65		0,986	
δ_b (mm)	6,56	-3,8588	-4,2708	6,56	-1,70	-1,47		0,863	
	41,33	8,37	-3,6391	-3,6801	8,37	-2,30	-2,27	0,989	
	50,19	9,45	-3,3871	-3,3276	9,45	-2,79	-2,84	1,018	
	62,89	10,54	-3,0201	-2,9719	10,54	-3,49	-3,55	1,016	
	70,38	10,90	-2,7877	-2,8544	10,90	-3,91	-3,82	-3,82	0,977
	85,80	11,26	-2,3606	-2,7369	11,26	-4,77		-4,11	
	118,80	11,62	-1,7606	-2,6194	11,62	-6,60		-4,44	
	129,97	11,10	-1,5374	-2,7891	11,10	-7,22		-3,98	
	91,86			0,00		-5,1			
	b	a	β	α	C				
Regresión:	0,32634539	-6,41158208	-3,064	-19,647	60,202				
	Coeficiente de correlación:						0,996		
	Promedio:						0,975		

Para determinar la regresión lineal se emplearon solamente los correspondientes a los valores de δ_b 2,30, 2,79, 3,49 y 3,91 que en los tanteos previos condujeron a los mejores valores de la correlación y de la desviación estándar.

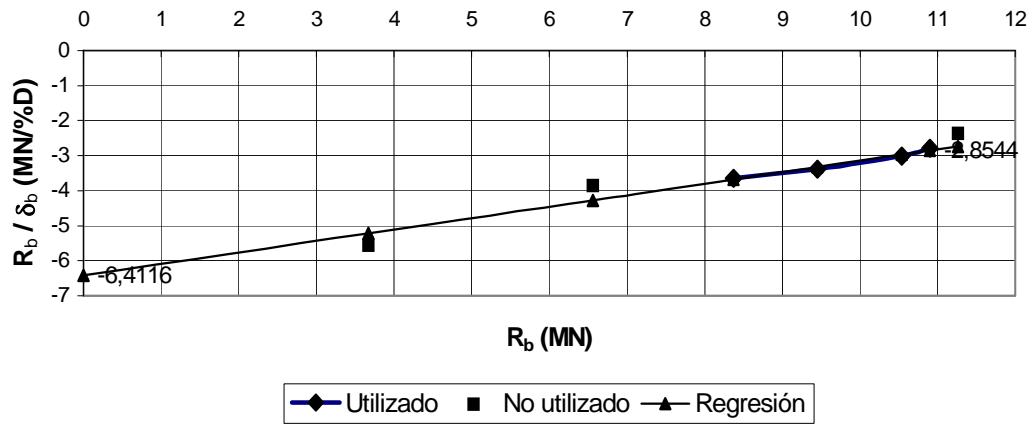


Figura 8. Representación gráfica de la fórmula (28) con datos de la TABLA 3. Los números son los valores de la regresión, R_b / δ_{hb} .

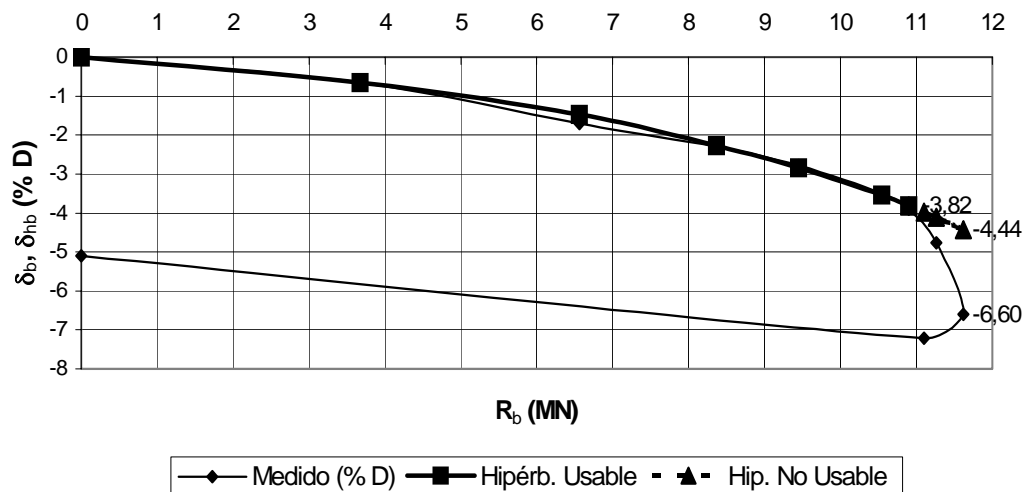


Figura 9. Representación gráfica de la fórmula (29) con datos de la TABLA 3. Los números son los valores de δ_b para la curva de los valores medidos y los de δ_{hb} para la de la hipérbola.

Para cargas en la base en las arcillas se determina claramente hasta que punto es posible utilizar una hipérbola rectangular para sustituir a la curva de los valores medidos. Reproduciendo lo que se muestra en la Figura 4, en la Figura 9 la línea gruesa indica el rango en que es posible hacer dicha sustitución que llega hasta $R_{hb} = 11,47$ MN en la primera y hasta $R_b = 10,90$ MN en la segunda. Cuando x_m es R_b (Figura 9) en lugar de δ_b (Figura 4) se enfatiza la diferencia entre los valores medidos y los de la continuación a partir de dicho máximo de la hipérbola rectangular representada por la línea de rayas.

Comentarios y Conclusiones

El empleo de la hipérbola rectangular permite formular la curva obtenida mediante los valores medidos hasta la falla en un amplio campo de la ingeniería geotécnica. Hay cuatro tipos de hipérbolas mostrados en cada uno de los cuadrantes de la Figura 1. Se enfatiza:

a) Que en cada caso se busca la hipérbola rectangular que mejor se ajusta a una curva de valores medidos, lo que permite definirla mediante los dos parámetros a y b, calculados como se indica en el texto.

Kondner and Zelasko (1963) para la aplicación “formulación hiperbólica de la relación esfuerzo – deformación específica de suelos”, empleando la hipérbola rectangular del cuadrante derecho inferior de la Figura 1 dedujeron la fórmula:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \varepsilon / (a + b \varepsilon) \quad (30)$$

Para esta aplicación, en la fórmula (9) $y_{hm} = (\sigma_1 - \sigma_3)$ y $x_m = \varepsilon$,

Introduciendo en la fórmula (30) el significado físico de a y b, $a = 1 / E_i$ $b = 1 / (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$, donde E_i está definido en la explicación de la fórmula (9a) y $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = (\sigma_1 - \sigma_3)_{asintótico} = 1 / \beta$, Duncan and Chang (1970) y Duncan et al (1980) desarrollaron soluciones con 6 y 9 parámetros respectivamente, convenientes para su utilización en análisis con el método de los elementos finitos.

b) Para cada uno de los 3 cuadrantes utilizados se ha hecho una diferencia entre la formulación y la aplicación. En la primera se tratan fórmulas, desde la (1) en buena parte de la geometría analítica, entre números sin sentido físico definido. Con la condición de que la curva de los valores medidos pertenezca al mismo cuadrante las mismas fórmulas así obtenidas pueden emplearse en diferentes aplicaciones de la ingeniería geotécnica y los mismos valores medidos pueden aplicarse, si tiene sentido físico, en diferentes cuadrantes.

c) La hipérbola rectangular que logre una precisión aceptable, determinada como se indica en el texto, puede reemplazar a la curva de los valores medidos solamente hasta la falla. En la Tabla 1 se da el valor, **0,994**, del coeficiente de correlación entre la curva de los valores medidos, columna y_m , y la hipérbola que mejor se ajusta a los mismos, columna y_{hm} , y el valor, **0,049**, del coeficiente de variación, COV, de la relación entre los puntos representativos de la hipérbola y los puntos representativos de los valores medidos. Es una buena precisión. La Tabla 1 está basada en valores medidos en el Ensayo O’CELL 2, (Pardini (2003) efectuado en la Argentina.

Como ejemplo de la convergencia probable entre los valores medidos y los de la hipérbola rectangular que mejor se adapta a los mismos, para la relación entre la carga total y el asentamiento relativo de la cota superior inicial del terreno en el cual está la parte embebida, Bolognesi (2003) presenta 6 ensayos de carga en la cabeza correctamente realizados sobre pilotes en los que se utilizaron diferentes medios constructivos, en perfiles de suelo constituidos exclusivamente por arenas o por arcillas y en perfiles mixtos. 5 de los 6 tienen un coeficiente de correlación **mayor de 0,99** y 1, con asentamientos medidos hasta 137.8 mm, 15,1% del diámetro del pilote ensayado, tiene **0,988**.

d) En el texto se han considerado 3 casos. En los 3 x_m es positivo e y_m es positivo en los cuadrantes derecho inferior e izquierdo superior y negativo en el cuadrante izquierdo inferior.

e). En los casos 1 y 3 se ha partido de valores medidos en un ensayo de carga en la base de un pilote y la disposición de la hoja de cálculo de las Tabla 1 y 3 es la que debe usarse. En el caso 2 no se parte de valores medidos. Se utiliza la hipérbola determinada mediante la

Tabla 1 y para atender requerimientos prácticos explicados en el texto se la representa en otro cuadrante. En el caso 3 iguales valores medidos, afectados con signos negativos y adoptando $y_m = \delta_b$, se representan en una cuadrante distinto que en el caso 1.

Para todos los cuadrantes es válida la fórmula (9), cuyos términos deben ser afectados con signos propios de cada cuadrante para x_m positivo:

$$y_{hm} = \frac{x_m}{a + bx_m}$$

En la hoja de cálculo de la Tabla 1 se obtienen los valores de **a** y **b** y el signo con que están afectados. En este caso (cuadrante derecho inferior de la Figura 1) ambos son positivos. En la hoja de cálculo de la Tabla 2 (cuadrante izquierdo superior de la Figura 1) **a** es positivo y **b** negativo. En el caso 3 (cuadrante izquierdo inferior de la Figura 1) **a** es negativo y **b** positivo. Teniendo en cuenta que la ordenada al origen de las Figuras 3, 6 y 8 es **a**, se visualiza lo anterior. En la 3 partiendo de un valor **a** positivo se obtiene una recta ascendente (**b** positivo), en la 6 partiendo de un valor **a** positivo se obtiene una recta descendente (**b** negativo) y en la 8 partiendo de un valor **a** negativo se obtiene una recta ascendente (**b** positivo).

f) También en los 3 casos presentados son propios de cada cuadrante para x_m positivo los signos de **a**, **β** y **C**. En el cuadrante derecho inferior de la Figura 1 **a** es positivo, **β** es negativo y **C** es negativo. En el cuadrante izquierdo superior de la Figura 1 **a** es negativo, **β** positivo y **C** negativo. En el cuadrante izquierdo inferior de la Figura 1 **a** es negativo, **β** es negativo y **C** es positivo. **C** tiene el mismo signo en las hipérbolas simétricas en cuadrantes opuestos.

g) En las arcillas en caso de que no se alcance la falla con los valores medidos nunca deben hacerse extrapolaciones por encima de los mismos y en general cuando se intenta hacerlo en casos sin falla definida se debe ser particularmente prudente al determinar hasta que valor puede estimarse segura la extrapolación propuesta.

h) En los cuatro tipos de hipérbola mostrados en cada uno de los cuadrantes de la Figura 1 se obtienen innumerables soluciones variando el valor de **C**, constante de la fórmula 1. Es por ello que siempre es probable encontrar una hipérbola para sustituir las curvas de valores medidos que no respondan a una ley lineal. La precisión del ajuste entre ambas indicará si es la solución conveniente.

Notación

a : α / β en valor absoluto;

b : $1 / \beta$ en valor absoluto. 2) Como subíndice indica base;

C : $\alpha\beta$ con sus signos;

E_i : Módulo tangente inicial;

x_h : valor de x en el sistema de coordenadas de la hipérbola;

x_m : valor de x en el sistema de coordenadas de los valores medidos;

R_b : Reacción contra la base del pilote según los valores medidos;

R_{hb} : Reacción contra la base del pilote según la hipérbola que reemplaza a los valores medidos;

y_h : valor de y en el sistema de coordenadas de la hipérbola;
 y_{hm} : valor de y de la hipérbola en el sistema de coordenadas de los valores medidos;
 y_m : valor de y en el sistema de coordenadas de los valores medidos;
 α : distancia entre los ejes de los valores y_h e y_m ;
 β : distancia entre los ejes de los valores x_h y x_m ;
 δ : desplazamiento;
 δ_b : asentamiento de la base del pilote;
 ε : deformación específica
 σ_1 : Esfuerzo principal mayor;
 σ_3 : Esfuerzo principal menor;

Referencias

- Bolognesi A. J. L. (2003). “Ensayos de Carga Estáticos de Compresión en Pilotes de Hormi-gón Moldeados en Sitio. Curva hiperbólica que mejor se ajusta a los valores medidos”. *Boletín de la Sociedad Argentina de Ingeniería Geotécnica*. N° 43, 23-36.
- Duncan J. M. and Chang C. “Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils”. *J. Soils Me-chanics and Foundations Division*, 96(SM5) 1629-1653.
- Duncan J. M., Byrne P., Wong K. S. and Mabry P. (1980). “Strength, Stress-Strain and Bula Modulus Parameters for Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Soil Masses”. *Report N°. UCB/GT/80-01. College of Engineering. Office of Research Ser-vice. University of California. Berkeley, California.*
- Kondner R. L. and Zelasko J. S. (1963). “A Hyperbolic Stress-Strain Formulation for Sands”. *Memoria del Segundo Congreso Panamericano de Mecánica de Suelos y Cimentacio-nes*. Brasil, 289-324.
- Pardini M. E. (2003). “Conexión Física Rosario–Victoria. Aspectos Geotécnicos Relevantes”. *Boletín de la Sociedad Argentina de Ingeniería Geotécnica*. N° 43, 37-49.